

Die Scheibe mit Linienpflaster

Pflüger, Alf

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 12, 1960,
S.66-76



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Die Scheibe mit Linienpflaster^{*)}

Von Alf Pflüger

Eingegangen am 5. 5. 1960

Summary: Calculated are the perturbations of stress which arise in an infinite plate with an originally homogeneous state of stress when connecting the plate along a finite line with a bar of negligible flexural rigidity. The normal force of such a "linear plaster" results from an integrodifferential equation which formally corresponds to the equation of the lifting line of an airfoil. As an example the elliptic linear plaster is investigated particularly.

Übersicht: Es werden die Spannungsstörungen berechnet, die in einer allseitig unendlich ausgedehnten Scheibe mit ursprünglich homogenem Spannungszustand entstehen, wenn die Scheibe längs einer bestimmten Strecke mit einem biegeweichen Stab verbunden wird. Die Längskraft eines derartigen „Linienpflasters“ folgt aus einer Integro-Differentialgleichung, die formal mit der Gleichung der tragenden Linie eines Flügels übereinstimmt. Als Beispiel wird das elliptische Linienpflaster näher untersucht.

1. Einleitung

Die Spannungsstörungen, die in einer Scheibe mit homogenem Spannungszustand durch ein Loch hervorgerufen werden, sind in der Literatur schon sehr häufig für die verschiedensten Lochformen behandelt worden. Dagegen ist nur selten der Fall betrachtet worden, daß eine Scheibe in einem relativ kleinen Bereich verstärkt ist, also gewissermaßen ein „Pflaster“ trägt. Dieses Problem ist jedoch für eine Reihe technischer Aufgaben bedeutungsvoll. Z. B. erfahren die in letzter Zeit vielfach für hohe Drücke gebauten kugelförmigen Gasbehälter durch die Anschlußbleche der tangential angeordneten Stützen eine für die Bemessung maßgebliche Störung des sonst gleichmäßigen Spannungszustandes, die angenähert durch die Störung wiedergegeben wird, die durch ein entsprechendes Pflaster in einer Scheibe erzeugt wird.

Im folgenden wird nach Abb. 1 eine allseitig unendlich ausgedehnte Scheibe konstanter Dicke betrachtet, die in ihrer Mittelfläche längs einer bestimmten Strecke mit einem stabförmigen Gebilde verbunden ist. Dieses „Linienpflaster“ möge einen beliebigen Verlauf der Dehnungssteifigkeit haben, aber vollkommen biegeweich sein. Der Spannungszustand der Scheibe sei in hinreichender Entfernung vom Pflaster (oder anders ausgedrückt: ohne Pflaster) homogen, sonst aber beliebig. Gesucht ist die durch das Pflaster verursachte Störung.

Es ist leicht einzusehen, daß für Schnitte senkrecht bzw. parallel zur Pflasterachse in der ganzen Scheibe ein reiner Schubspannungszustand mög-

^{*)} Herrn Professor Dr. phil. Walter Tollmien zur Vollendung seines 60. Lebensjahres gewidmet.

lich ist, der durch das Pflaster nicht behindert wird, da dessen Achse hierbei ungedehnt bleibt. Es genügt also, für die Scheibe im Unendlichen nur Längsspannungen parallel zur Pflasterachse und senkrecht dazu vorauszusetzen.

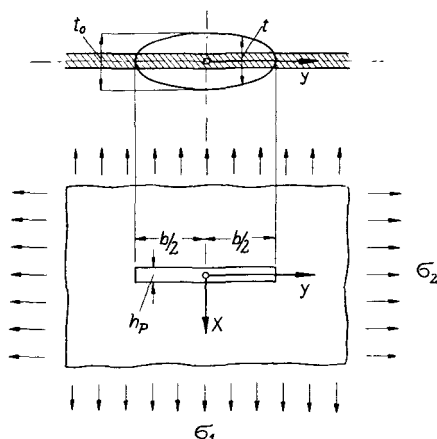


Abb. 1. Skizze des Problems mit Bezeichnungen

2. Bezeichnungen und Abkürzungen

b Pflasterlänge,

x, y rechtwinklige Koordinaten in der Scheibenmittelfläche. Die y -Achse ist die Pflasterachse. Der Koordinatennullpunkt liegt in der Mitte der Pflasterlänge b .

$$\xi = \frac{x}{b/2}, \eta = \frac{y}{b/2} \text{ dimensionslose Koordinaten,}$$

y', η'	Zwischenvariable auf den Achsen y bzw. η ,
t	Pflasterbreite,

t_0	Pflasterbreite für $y = 0$,
0	1,0000
1	0,9999
2	0,9996
3	0,9989
4	0,9978
5	0,9963
6	0,9943
7	0,9918
8	0,9888
9	0,9852
10	0,9811
11	0,9764
12	0,9712
13	0,9654
14	0,9591
15	0,9522
16	0,9448
17	0,9368
18	0,9283
19	0,9192
20	0,9096
21	0,8994
22	0,8887
23	0,8774
24	0,8656
25	0,8532
26	0,8403
27	0,8268
28	0,8128
29	0,7982
30	0,7831
31	0,7674
32	0,7512
33	0,7344
34	0,7171
35	0,6992
36	0,6808
37	0,6618
38	0,6423
39	0,6222
40	0,6016
41	0,5804
42	0,5587
43	0,5364
44	0,5136
45	0,4902
46	0,4663
47	0,4418
48	0,4168
49	0,3912
50	0,3651
51	0,3384
52	0,3112
53	0,2835
54	0,2552
55	0,2264
56	0,1971
57	0,1673
58	0,1370
59	0,1062
60	0,0750
61	0,0433
62	0,0111
63	0,0000

$$T = \frac{t}{t_0},$$

h, h_p Scheiben- bzw. Pflasterdicke,

E, E_n Elastizitätsmodul der Scheibe bzw. des Pflasters,

μ Querkontraktionszahl,

$\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ Spannungen in der Scheibe (vgl. Abb. 3),

 $\bar{\sigma}_x, \bar{\sigma}_y, \bar{\tau}_{xy}$ Scheibenspannungen für $y = 0$,

σ_1, σ_2 Scheibenspannungen im Unendlichen, d. h. ohne Pflasterstörung,

σ_p Pflasterspannung, die den Annahmen nach über den Pflasterquerschnitt konstant ist,

τh vom Pflaster auf die Scheibe längs der Berührungslinie übertragene Linienlast; nach Abb. 2 positiv, wenn sie auf das Pflaster in Richtung der positiven y -Achse wirkt,

$$L = \frac{\sigma_p}{\sigma_2 - \sigma_1} \frac{E t}{E_p t_0} \text{ bezogene Pflasterkraft,}$$

$$\lambda = \frac{3 + 2\mu - \mu^2}{2\pi} \frac{h_p E_p t_0}{h E b},$$

$$K = \frac{\sigma_p t_0 h_p}{\pi b h}.$$

3. Spannungs- und Verzerrungszustand des Pflasters

Betrachtet man zunächst die Verhältnisse für das von der Scheibe losgetrennte Pflaster, so ergibt sich nach Abb. 2 aus der Gleichgewichtsbedingung für die in Pflasterlängsrichtung wirkenden Kräfte

$$\bar{\tau} = -\frac{h_p d}{h} \frac{d(\sigma_p t)}{dy} = -\frac{2}{b} \frac{h_p}{h} \frac{d(\sigma_p t)}{d\eta}. \quad (1)$$

Die zwischen Scheibe und Pflaster wirkende Linienlast $\bar{\tau} h$ kann danach leicht ermittelt werden, wenn die Pflasterspannung σ_p bekannt ist.

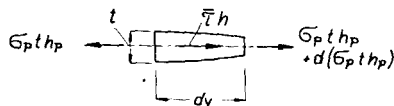


Abb. 2. Gleichgewicht am Pflasterelement

Die Dehnung der Pflasterachse ist σ_p/E_p . Sie muß längs der Berührungslinie mit der Dehnung der Scheibe übereinstimmen, die gleich $1/E (\bar{\sigma}_y - \mu \bar{\sigma}_x)$ ist. Man erhält so die Beziehung

$$\sigma_p = \frac{E_p}{E} (\bar{\sigma}_y - \mu \bar{\sigma}_x). \quad (2)$$

4. Spannungszustand der Scheibe

Zur Berechnung der Scheibenspannungen sei folgender Weg eingeschlagen, der vom Verfasser bereits in einer früheren Arbeit [1] zur Lösung eines ähnlichen Problems benutzt wurde. Wird eine allseitig unendlich ausgedehnte Scheibe nach Abb. 3 im Punkte $x = 0, y = y'$ durch eine in Richtung der

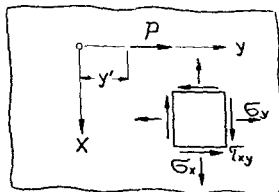


Abb. 3. Scheibe mit Einzelkraft

positiven y -Achse wirkende Einzelkraft P beansprucht, so entsteht dadurch nach [2] der Spannungszustand

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{4\pi h} \frac{(1+3\mu)x^2 - (1-\mu)(y-y')^2}{[x^2 + (y-y')^2]^2} (y-y'), \\ \sigma_y &= -\frac{P}{4\pi h} \frac{(1-\mu)x^2 + (3+\mu)(y-y')^2}{[x^2 + (y-y')^2]^2} (y-y'), \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{4\pi h} \frac{(1-\mu)x^2 + (3+\mu)(y-y')^2}{[x^2 + (y-y')^2]^2} x. \end{aligned} \right\} \quad (3a, b, c)$$

Setzt man $P = -\bar{\tau} h dy'$ und integriert über die Pflasterlänge b , so erhält man die durch die Gesamtheit der Linienlasten $\bar{\tau} h$ verursachte Spannungsstörung. Nach Addition des ungestörten Zustandes $\sigma_x = \sigma_1$, $\sigma_y = \sigma_2$ und Einführung der dimensionslosen Koordinaten ξ, η bekommt man für den vollständigen Spannungszustand in der Scheibe

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \bar{\tau}(\eta') \frac{(1+3\mu)\xi^2 - (1-\mu)(\eta-\eta')^2}{[\xi^2 + (\eta-\eta')^2]^2} (\eta-\eta') d\eta', \\ \sigma_y &= \sigma_2 + \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \bar{\tau}(\eta') \frac{(1-\mu)\xi^2 + (3+\mu)(\eta-\eta')^2}{[\xi^2 + (\eta-\eta')^2]^2} (\eta-\eta') d\eta', \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \bar{\tau}(\eta') \frac{(1-\mu)\xi^2 + (3+\mu)(\eta-\eta')^2}{[\xi^2 + (\eta-\eta')^2]^2} \xi d\eta'. \end{aligned} \right\} \quad (4a, b, c)$$

5. Gleichung für die Pflasterspannung

Die Spannungen $\bar{\sigma}_x$ und $\bar{\sigma}_y$ in der Berührungslinie zwischen Pflaster und Scheibe ergeben sich aus (4) mit $\xi = 0$ zu

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_1 - \frac{1-\mu}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\tau}(\eta')}{\eta-\eta'} d\eta', \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma_2 + \frac{3+\mu}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\tau(\eta')}{\eta-\eta'} d\eta'. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Da über die Stelle $\eta' = \eta$ hinweg integriert werden muß, sind die Integrale in (5) uneigentlich. Im folgenden sei stets der Cauchysche Hauptwert gemeint.

Setzt man (5) in (2) ein, so erhält man für die Pflasterspannung

$$\sigma_p = \frac{E_p}{E} \left[\sigma_2 - \mu \sigma_1 + \frac{3+2\mu-\mu^2}{4\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\tau}(\eta')}{\eta-\eta'} d\eta' \right].$$

Mit $\bar{\tau}$ nach (1) und nach Multiplikation der Gleichung mit t folgt

$$\sigma_p t = \frac{E_p}{E} t \left[\sigma_2 - \mu \sigma_1 - \frac{3+2\mu-\mu^2}{4\pi} \frac{2}{b} \frac{h_p}{h} \int_{-1}^{+1} \frac{d(\sigma_p t)}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta-\eta'} \right].$$

also eine Gleichung, in der als einzige Unbekannte das Produkt $\sigma_p t$, d. h. die auf die Dicke $h_p = 1$ bezogene Pflasterkraft vorkommt. Die Gleichung läßt sich mit den in Abschnitt 2 definierten Abkürzungen L , T und λ in der folgenden kurzen Form schreiben:

$$L = T \left[1 - \lambda \int_{-1}^{+1} \frac{dL(\eta')}{d\eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \right]. \quad (6)$$

Diese Integro-Differentialgleichung für die bezogene Pflasterkraft L ist eine in der Aerodynamik seit langem bekannte und oft behandelte Gleichung. Sie stimmt formal mit der Prandtlschen Gleichung der tragenden Linie eines Flügels überein. Dieselbe Gleichung ergab sich auch in [1] als grundlegende Gleichung des dort behandelten Problems. Da damals die Analogie zwischen dem aerodynamischen und dem elastizitätstheoretischen Problem ausführlich erörtert wurde, sei hier auf ähnliche Betrachtungen verzichtet. Die in der Aerodynamik zur Lösung von (6) entwickelten Methoden können aber ohne weiteres übernommen werden, womit die Berechnung beliebiger Pflasterformen möglich wird. Bei allen Näherungsverfahren ist allerdings darauf zu achten, daß die Genauigkeit in der Ermittlung von σ_p so weit getrieben werden muß, daß die zur Bestimmung von $\bar{\tau}$ notwendige Differentiation nicht zu ungenau wird.

6. Das elliptische Linienpflaster

In der Tragflügeltheorie ergibt sich für den Flügel mit elliptischem Umriß eine besonders einfache Lösung. Dementsprechend sei auch hier das elliptische Linienpflaster als Beispiel für die Lösung der obigen Gleichungen näher betrachtet. Es sei also

$$\frac{t}{t_0} = T = \sqrt{1 - \eta^2}. \quad (7)$$

(6) läßt sich dann mit

$$L = \frac{\sqrt{1 - \eta^2}}{1 + \lambda \pi} \quad (8)$$

befriedigen, wie man durch Einsetzen leicht bestätigt. Für die Pflasterspannung ergibt sich ein konstanter Wert:

$$\begin{aligned} \sigma_p &= \frac{E_p}{E} (\sigma_2 - \mu \sigma_1) \frac{L}{T}, \\ \sigma_p &= \frac{E_p \sigma_2 - \mu \sigma_1}{E} \frac{1}{1 + \lambda \pi}. \end{aligned} \quad (9)$$

Für die „Linienspannung“ $\bar{\tau}$ folgt nach (1) und mit (7) und $\sigma_p = \text{const.}$

$$\bar{\tau} = 4 \sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h} \frac{\eta}{\sqrt{1 - \eta^2}}. \quad (10)$$

Damit wird dann im Pflasterbereich

$$\begin{aligned} \text{für } \eta^2 \leq 1: \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\tau}(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta' &= 4\sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{-1}^{\eta-\epsilon} \frac{\eta'}{\sqrt{1-\eta'^2} \eta - \eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} + \int_{\eta+\epsilon}^{+1} \frac{\eta'}{\sqrt{1-\eta'^2} \eta - \eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \right) \\ &= -4\pi\sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h}, \end{aligned}$$

und außerhalb des Pflasters

$$\begin{aligned} \text{für } \eta^2 > 1: \int_{-1}^{+1} \frac{\bar{\tau}(\eta')}{\eta - \eta'} d\eta' &= 4\sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h} \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'}{\sqrt{1-\eta'^2} \eta - \eta'} \frac{d\eta'}{\eta - \eta'} \\ &= 4\pi\sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h} \left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} - 1 \right). \end{aligned}$$

Aus (5) folgt nun für die Spannungen längs der y -Achse im Pflasterbereich

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_1 + (1 - \mu) \sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h}, \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma_2 - (3 + \mu) \sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h}, \\ \bar{\tau}_{xy} &= \frac{1}{2} \bar{\tau} \operatorname{sgn} \xi = 2\sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h} \frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \operatorname{sgn} \xi, \end{aligned} \right\} \quad (11a, b, c)$$

außerhalb des Pflasters

$$\left. \begin{aligned} \bar{\sigma}_x &= \sigma_1 - (1 - \mu) \sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h} \left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} - 1 \right), \\ \bar{\sigma}_y &= \sigma_2 + (3 + \mu) \sigma_p \frac{t_0}{b} \frac{h_p}{h} \left(\frac{\eta}{\sqrt{\eta^2-1}} - 1 \right), \\ \bar{\tau}_{xy} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (12a, b, c)$$

Die Spannungen in der übrigen Scheibe lassen sich mit (10) aus (4) berechnen. Dabei sei zur Abkürzung gesetzt

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'(\eta - \eta')}{\sqrt{1-\eta'^2}} \frac{(1 + 3\mu)\xi^2 - (1 - \mu)(\eta - \eta')^2}{[\xi^2 + (\eta - \eta')^2]^2} d\eta', \\ S_y &= \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'(\eta - \eta')}{\sqrt{1-\eta'^2}} \frac{(1 - \mu)\xi^2 + (3 + \mu)(\eta - \eta')^2}{[\xi^2 + (\eta - \eta')^2]^2} d\eta', \\ S_{xy} &= \int_{-1}^{+1} \frac{\eta'\xi}{\sqrt{1-\eta'^2}} \frac{(1 - \mu)\xi^2 + (3 + \mu)(\eta - \eta')^2}{[\xi^2 + (\eta - \eta')^2]^2} d\eta'. \end{aligned} \right\} \quad (13a, b, c)$$

Die Ausdrücke (4) schreiben sich dann

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_1 + K S_x, \\ \sigma_y &= \sigma_2 + K S_y, \\ \tau_{xy} &= K S_{xy} \end{aligned} \right\} \quad (14a, b, c)$$

$$\text{mit } K = \frac{\sigma_p t_0 h_p}{\pi b h}.$$

Die Integrale in (13), die als „bezogene Störspannungen“ bezeichnet werden können, lassen sich in geschlossener Form auswerten, wenn auch die zugehörigen Rechnungen ziemlich umfangreich sind*). Hier sei nur das Ergebnis angeführt:

$$\left. \begin{aligned} S_x &= \pi + \frac{1}{r^2} [-I_1 \xi^2 (r^2 + 1 - \eta^2 + \xi^2) + I_2 \eta (r^2 - 2 \xi^2)] \\ &\quad - \mu \left\{ \pi + \frac{1}{r^2} [I_1 (-r^2 + 1 - \eta^2 + \xi^2) + I_2 \eta (r^2 + 2 \xi^2)] \right\}, \\ S_y &= -3\pi + \frac{1}{r^2} [I_1 \xi^2 (3r^2 + 1 - \eta^2 + \xi^2) - I_2 \eta (3r^2 - 2 \xi^2)] \\ &\quad - \mu \left\{ \pi + \frac{1}{r^2} [-I_1 \xi^2 (r^2 + 1 - \eta^2 + \xi^2) + I_2 \eta (r^2 - 2 \xi^2)] \right\}, \\ S_{xy} &= \frac{\xi}{r^2} [2I_1 \eta (r^2 - \xi^2) + I_2 (2r^2 + 1 - \eta^2 + \xi^2)] \\ &\quad + \mu \frac{\xi}{r^2} [-2I_1 \eta \xi^2 + I_2 (1 - \eta^2 + \xi^2)] \end{aligned} \right\} \quad (15a, b, c)$$

$$\text{mit } r = \sqrt{(1 - \eta^2 + \xi^2)^2 + 4\eta^2 \xi^2},$$

$$I_1 = \frac{\pi}{r} \sqrt{\frac{r + 1 - \eta^2 + \xi^2}{2 \xi^2}},$$

$$I_2 = -\frac{\pi}{r} \eta \sqrt{\frac{r - (1 - \eta^2 + \xi^2)}{2 \eta^2}}.$$

Zur Veranschaulichung des Ergebnisses sei folgendes Zahlenbeispiel betrachtet:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma \quad \text{d. h. allseitig gleichgroßer Zug,}$$

$$\frac{E_p}{E} = \infty \quad \text{d. h. vollkommen starres Pflaster,}$$

$$\mu = 0,3.$$

Es wird dann

$$\lambda = \infty, \quad \frac{\sigma_p}{\sigma_0} = \frac{2(1 - \mu)}{3 + 2\mu - \mu^2} \frac{h b}{h_p t_0} = 0,05968 \pi \frac{h b}{h_p t_0}, \quad K = 0,05968 \sigma.$$

*) Für die Durchführung dieser Rechnungen und ebenso für die nachfolgende numerische Auswertung bin ich Herrn Dr.-Ing. D. Withum zu besonderem Dank verpflichtet.

Die Spannungen werden jetzt zweckmäßigerweise auf die Spannung σ bezogen. Das Ergebnis zeigen die Abbildungen 4a, b, c, in denen durch entsprechende Schraffur die Störspannungen besonders hervorgehoben sind.

Alle Spannungen werden an den Pflasterenden unendlich groß. Im Sinne der Kerbspannungslehre ist dieses ein Kennzeichen dafür, daß die entwickelte Theorie bei der Annäherung an das Laschenende versagt und gegebenenfalls

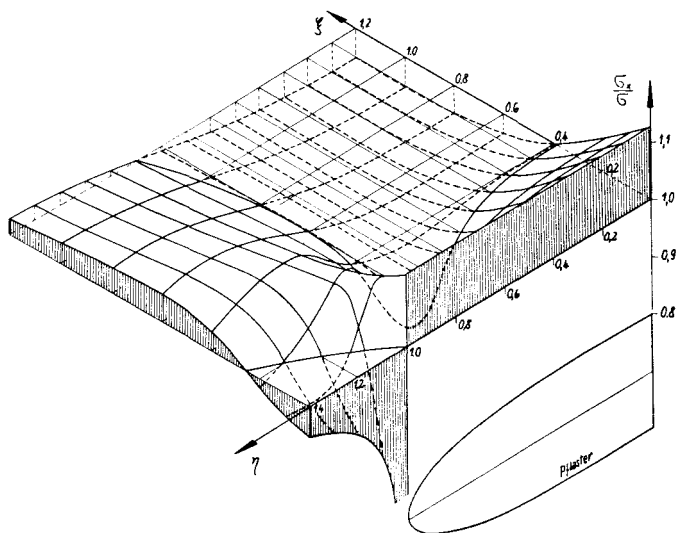


Abb. 4a. Längsspannungen σ_x beim starren elliptischen Pflaster

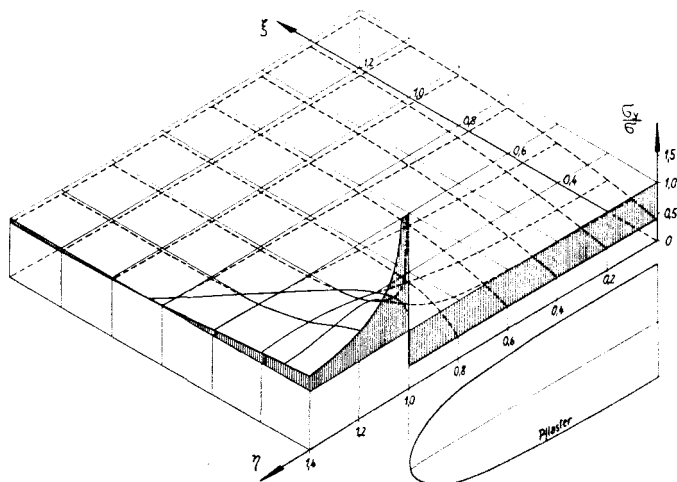


Abb. 4b. Längsspannungen σ_y beim starren elliptischen Pflaster

durch genauere Rechnungen oder Versuche ergänzt werden muß. Im übrigen entspricht die Schubspannung am meisten dem erwarteten Verlauf, da sie die bekannte Aussage liefert, daß die Verbindung zwischen Scheibe und Pflaster am stärksten am Laschenende beansprucht wird. Überraschend ist jedoch der starke Anstieg der Längsspannungen in der Scheibe in der Nähe der Pflasterenden außerhalb des Pflasterbereiches, woraus hervorgeht, daß auch ein Pflaster Kerbeffekte wie ein Loch liefern kann. Diese Erkenntnis ist das für

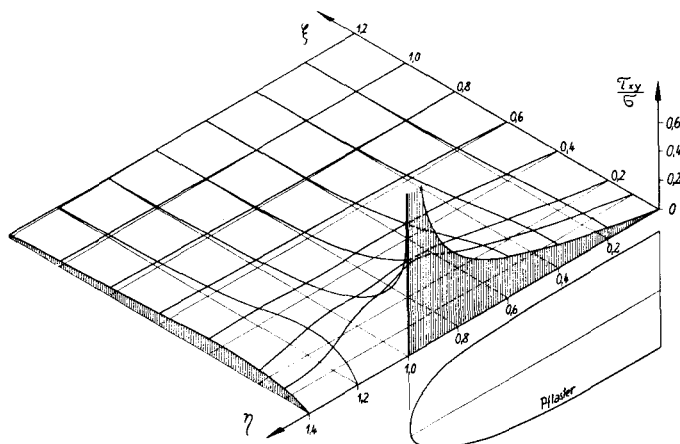


Abb. 4c. Schubspannungen τ_{xy} beim starren elliptischen Pflaster

Konstruktion und Bemessung wichtigste Ergebnis der gesamten Untersuchung. Näher auf Fragen der Praxis einzugehen, würde jedoch im Rahmen dieser Arbeit zu weit führen.

7. Vergleich zwischen elliptischem Linien- und Flächenpflaster

Verbindet man nach Abb. 5 ein Pflaster nicht längs einer Berührungslinie, sondern — wie es der ursprünglichen Bedeutung des Wortes „Pflaster“ entspricht — flächenhaft mit der Scheibe, so ergibt sich ein grundsätzlich neues

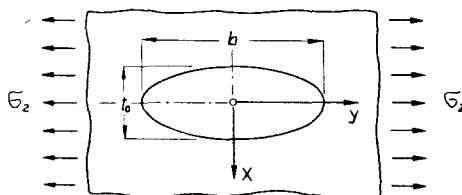


Abb. 5. Scheibe mit elliptischem Flächenpflaster

Problem. Es interessiert aber doch, wie groß der Unterschied zwischen dem Verhalten eines Linienpflasters und dem eines gleichartigen Flächenpflasters ist.

Das elliptische Flächenpflaster wurde kürzlich von G. Kaiser in einer Arbeit [3] behandelt, die auch einen Vergleich mit Meßergebnissen bringt. Diese beziehen sich auf das Beispiel

$$\sigma_1 = 0, \quad \frac{E_p}{E} = 1, \quad \frac{h_p}{h} = 2, \quad \frac{t_0}{b} = \frac{1}{4,1}, \quad \mu = 0,3.$$

Hierfür ergab sich der in Abb. 6 dargestellte Verlauf der Spannung $\bar{\sigma}_y$.

Für das Linienpflaster wird mit denselben Ausgangsgrößen

$$\lambda = \frac{0,8561}{\pi}, \quad \frac{\sigma_p}{\sigma_2} = 0,5388, \quad K = 0,08366 \sigma_2.$$

Die sich hiermit nach (12b) und (14b) ergebende Spannung $\bar{\sigma}_y$ ist ebenfalls in Abb. 6 eingetragen. Der Unterschied ist deutlich, aber doch nicht so groß, daß

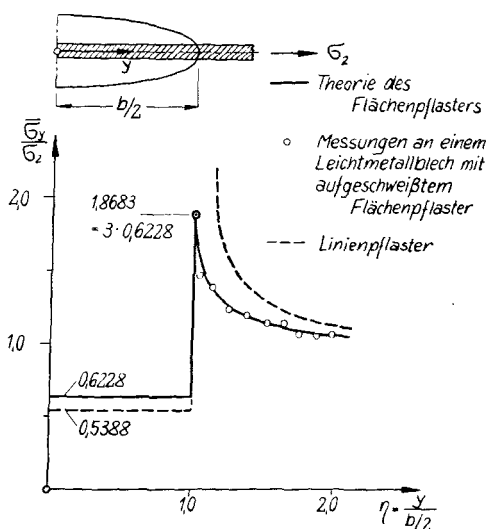


Abb. 6. Vergleich zwischen Flächen- und Linienpflaster

man die für das Linienpflaster errechneten Werte nicht als brauchbare Näherung für das Flächenpflaster ansehen könnte. Mit der Übertragung dieses Schlusses auf andere Abmessungen wird man natürlich vorsichtig sein müssen.

8. Zusammenfassung

Das Problem der Spannungsstörungen in einer allseitig unendlich ausgedehnten Scheibe mit ursprünglich homogenem Spannungszustand infolge eines sogenannten Linienpflasters wird dadurch gelöst, daß der Spannungszustand im Pflaster durch eine Differentialgleichung, der in der Scheibe „quellenmäßig“ durch Integration über alle Belastungseinflüsse beschrieben wird. Beide Spannungszustände werden dann durch die Bedingung miteinander verknüpft, daß

die Dehnungen im Pflaster und in der Scheibe längs der Berührungslinie übereinstimmen müssen. Es ergibt sich so eine Integro-Differentialgleichung, die in der Form der Prandtl'schen Gleichung der tragenden Linie geschrieben werden kann. Die Lösung wird nach den Methoden der Aerodynamik für beliebige Pflasterformen möglich. Als Beispiel wird das elliptische Pflaster näher behandelt. Das wichtigste Ergebnis der Rechnung besteht in der Erkenntnis, daß die Scheibe am ungünstigsten an den Pflasterenden, jedoch außerhalb des Pflasterbereiches, beansprucht wird. Die Arbeit schließt mit einem Vergleich zwischen dem elliptischen Linien- und Flächenpflaster.

Literatur

- [1] A. Pflüger, Z. angew. Math. Mech. 25/27 (1947), S. 177.
- [2] K. Girkmann, Flächentragwerke, Wien 1959, S. 115.
- [3] G. Kaiser, Die Scheibe mit elliptischem Pflaster, Dissertation, Technische Hochschule Hannover, 1960.